Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VII,** 1.

UNENDLICH VIELE LINEARE KONGRUENZEN MIT UNENDLICH VIELEN UNBEKANNTEN

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1925

Pris: Kr. 1,40.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs videnskabelige Meddelelser udkommer fra 1917 indtil videre i følgende Rækker:

Historisk-filologiske Meddelelser,
Filosofiske Meddelelser,
Mathematisk-fysiske Meddelelser,
Biologiske Meddelelser.

Prisen for de enkelte Hefter er 50 Øre pr. Ark med et Tillæg af 50 Øre for hver Tavle eller 75 Øre for hver Dobbelttavle.

Hele Bind sælges dog 25 pCt. billigere.

Selskabets Hovedkommissionær er *Andr. Fred. Høst & Søn*, Kgl. Hof-Boghandel, København.

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.
Mathematisk-fysiske Meddelelser. **VII,** 1.

UNENDLICH VIELE LINEARE KONGRUENZEN MIT UNENDLICH VIELEN UNBEKANNTEN

VON

HARALD BOHR

KØBENHAVN
HOVEDKOMMISSIONÆR: ANDR. FRED. HØST & SØN, KGL. HOF-BOGHANDEL
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1925

Einleitung.

Bei der Untersuchung der Klasseneinteilung fastperiodischer Funktionen[1] bin ich auf das folgende Problem gestossen:

Es sei ein System von unendlich[2] vielen Linearformen in unendlich vielen Variablen

$$(1) \qquad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

vorgelegt, wo jede einzelne Linearform nur endlich viele der Variablen $x_1, x_2, \cdots$ enthält, und wo die Koeffizienten r alle rationale Zahlen sind ($r_{n,q_n} \neq 0$).[3] Es bezeichne Π_1 die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes, für welche die unendlich vielen linearen Kongruenzen in den unendlich vielen Unbekannten $x_1, x_2, \cdots$

$$(2) \quad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv \theta_n \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine simultane Lösung $(x_1, x_2, \cdots) = (x_1^*, x_2^*, \cdots)$ besitzen, und es bezeichne Π_2 die Menge aller Punkte $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes, für welche bei jedem festen positiven ganzen N die N ersten der Kon-

[1] H. Bohr: Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen II (Anhang 1, § 3), Acta Mathematica 1925.

[2] Wir gebrauchen das Wort »unendlich« überall im Sinne »abzählbar unendlich«.

[3] Es enthält also jede der unendlich vielen Linearformen mindestens eine der Variablen $x_1, x_2, \cdots$. Dagegen brauchen nicht alle unendlich vielen Variablen tatsächlich vorzukommen.

gruenzen (2) eine Lösung[1] $(x_1, x_2, \cdots) = (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots)$ haben.[2]

Es ist klar, dass sowohl Π_1 wie Π_2 den Anfangspunkt $(0, 0, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes enthalten, und ferner *dass*

$$\Pi_1 < \Pi_2$$

ist[3]; denn eine simultane Lösung $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ der sämtlichen unendlich vielen Kongruenzen (2) wird ja zugleich jede endliche Anzahl der Kongruenzen befriedigen.

Unser Problem lautet nun: *Wann sind die beiden Mengen Π_1 und Π_2 mit einander identisch*, d. h. wie soll das System (1) von Linearformen beschaffen sein, damit es, bei beliebig gegebenen Werten $\theta_1, \theta_2, \cdots$, für die Existenz einer simultanen Lösung der unendlich vielen Kongruenzen (2) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sei, dass die N ersten dieser Kongruenzen bei jedem N eine Lösung besitzen?

Es gibt einen einfachen Fall, wo man sofort sieht, dass $\Pi_1 = \Pi_2$ ist. In der Tat gilt

Satz 1. *Falls die rationalen Koeffizienten r der unendlich vielen Linearformen (1) sämtlich* **ganze** *Zahlen sind, fallen die beiden Mengen Π_1 und Π_2 zusammen.*

Beweis. Es sei $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ ein beliebiger Punkt der

[1] Es ist für unsere Zwecke bequem unter einer »Lösung« der N ersten Kongruenzen (2) einen Punkt $(x_1, x_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes zu verstehen, obwohl in diesen N Kongruenzen nur endlich viele der Variablen x vorkommen, und es somit ganz belanglos ist, welche Werte die Koordinaten x_m von einer gewissen Stelle an haben.

[2] In der Definition der Menge Π_2 hätten wir natürlich statt »bei jedem N die N ersten der Kongruenzen« ebensogut »jede beliebige endliche Anzahl der Kongruenzen« schreiben können.

[3] Unter $A < B$ (oder $B > A$), wo A und B zwei Punktmengen desselben Raumes sind, verstehen wir, dass die Punktmenge A in der Punktmenge B enthalten ist.

Menge Π_2, d. h. es haben bei jedem festen N die N ersten der Kongruenzen (2) eine Lösung $(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots)$. Hierbei können wir uns diese Lösung so gewählt denken, dass jede Koordinate x_m zwischen 0 (incl.) und 1 (excl.) gelegen ist; denn da die Koeffizienten der N Kongruenzen alle ganz sind, darf ja in einer Lösung jede Koordinate x_m um eine beliebige ganze Zahl geändert werden. Die aus diesen Lösungen

$$(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots) \qquad (N = 1, 2, \cdots)$$

gebildete Punktmenge des unendlich-dimensionalen Raumes hat daher gewiss mindestens einen Haüfungspunkt $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$, in dem Sinne, dass es eine Folge von wachsenden positiven ganzen Zahlen $N_1, N_2, \cdots, N_p, \cdots$ gibt, so dass bei jedem festen $m = 1, 2, \cdots$ die Limesgleichung

$$\lim_{p \to \infty} x_m^{(N_p)} = x_m^*$$

besteht. Dieser Häufungspunkt $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ wird alsdann eine simultane Lösung der sämtlichen unendlich vielen Kongruenzen (2) sein. In der Tat, falls n_0 eine beliebige positive ganze Zahl ist, wird $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ aus Stetigkeitsgründen die n_0^{te} Kongruenz befriedigen, weil in dieser Kongruenz nur endlich viele der Variablen x vorkommen, und der Punkt $(x_1^{(N_p)}, x_2^{(N_p)}, \cdots)$ bei jedem $N_p \geqq n_0$ eine Lösung der n_0^{ten} Kongruenz darstellt. Es gehört somit der Punkt $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ auch zur Menge Π_1, d. h. es fallen die beiden Mengen Π_1 und Π_2 zusammen.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist zu zeigen, dass der im Satze 1 betrachtete Fall »wesentlich« der einzige ist, wo $\Pi_1 = \Pi_2$ ist. Wir werden nämlich beweisen, *dass es für das Zusammenfallen der beiden Mengen Π_1 und Π_2 nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist,* *dass das gegebene System (1) durch eine »lineare Substitution« in ein neues System von Linearformen mit lauter* **ganzen** *Koeffizienten übergeführt werden kann.*

Wir teilen die Untersuchung in fünf Paragraphen ein.

§ 1 enthält einige Bemerkungen über Systeme von linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, wo (wie bei den obigen Kongruenzen) in jeder einzelnen Gleichung nur endlich viele Unbekannte auftreten. Für ein derartiges Gleichungsystem wurde bekanntlich von Toeplitz in einer interessanten Abhandlung[1] eine erschöpfende Theorie gegeben, in welcher gezeigt wurde, dass die Verhältnisse bei einem solchen System fast ebenso einfach liegen, wie bei einem System von nur endlich vielen Gleichungen. Wir brauchen aus dieser Theorie nur ein einzelnes Resultat, für welches wir einen direkten aüsserst einfachen Beweis geben.

In § 2 wird, mit Hülfe des Satzes von § 1, der Begriff einer linearen Substitution in unendlich vielen Variabeln erörtert.

§ 3 bringt eine einfache Reduktion der gestellten Aufgabe, indem gezeigt wird, dass man sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Betrachtung solcher Systeme (1) beschränken kann, wo jede einzelne der Variablen x_1, $x_2, \cdots$ durch lineare Kombination endlich vieler der Linearformen isoliert werden kann.[2]

[1] O. Toeplitz: Über die Auflösung unendlichvieler linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Palermo Rendiconti Bd. 28 (1909), S. 88—96.

[2] Durch diese Reduktion sichern wir uns einerseits, dass jede der Variablen x_m tatsächlich vorkommt, und andererseits, dass nicht gewisse Variable, z. B. x_2 und x_5, überall in einer festen Kombination, etwa

In § 4 leiten wir einige einfache, auch an sich ganz interessante **Kriterien** dafür her, dass ein (reduziertes) System (1) durch eine lineare Substitution in ein neues System mit lauter **ganzen** Koeffizienten übergeführt werden kann.

Schliesslich wird im § 5 der oben genannte Hauptsatz über die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zusammenfallen der beiden Mengen Π_1 und Π_2 bewiesen.

§ 1.

Unendlich viele lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.

Für unsere späteren Überlegungen brauchen wir den

Satz 2. *Damit ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen der Form*

$$(3) \qquad \varrho_{n,1} x_1 + \varrho_{n,2} x_2 + \cdots + \varrho_{n,q_n} x_{q_n} = \vartheta_n \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

wo die Koeffizienten ϱ *und die Konstanten* ϑ_n *beliebige reelle Zahlen sind, eine simultane Lösung* $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ *besitze, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dass die Gleichungen keinen »offenkundigen Widerspruch« aufweisen,* d. h. dass es kein solches System von endlich vielen reellen Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ gibt, dass durch lineare Kombination der N ersten Gleichungen mit den respektiven Multiplikatoren $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_N$ eine Gleichung der Form

$$0 x_1 + 0 x_2 + \cdots + 0 x_L = k$$

mit $k \neq 0$ erhalten wird.

Beweis. Es handelt sich darum, aus der Annahme, dass

$\frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{7} x_5$ auftreten (in welchem Falle es ja natürlicher ist, diese zwei Variablen x_2 und x_5 durch eine einzige neue Variable $z = \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{7} x_5$ zu ersetzen).

kein offenkundiger Widerspruch zwischen den Gleichungen vorliegt, die Existenz mindestens einer (simultanen) Lösung zu beweisen. Hierzu betrachten wir zunächst die Variable x_1 und unterscheiden zwischen den beiden folgenden Möglichkeiten:

1^0 Entweder ist x_1 »isolierbar«; d. h. es lässt sich durch lineare Kombination endlich vieler der Gleichungen (3) eine Gleichung der Form $x_1 = c_1$ (c_1 konstant) ableiten. Vielleicht lässt sich x_1 in mehreren verschiedenen Weisen isolieren; das Resultat (d. h. der Wert der Konstanten c_1) muss aber immer dasselbe sein, weil sonst die Gleichungen (3) im offenkundigen Widerspruch mit einander wären.

2^0 Oder x_1 ist nicht isolierbar.

Im Falle 1^0 setzen wir $x_1 = x_1^*$, wo x_1^* die bei der Isolation von x_1 auftretende Konstante c_1 bedeutet, und im Falle 2^0 geben wir x_1 einen ganz beliebig gewählten, von nun an festzuhaltenden Wert x_1^*.

Wir setzen nun für die Variable x_1 ihren somit bestimmten Wert x_1^* in das Gleichungsystem (3) ein (und ziehen die entsprechenden Glieder auf die rechten Seiten der Gleichungen über). Das hierdurch entstandene neue Gleichungsystem in den Variablen $x_2, x_3, \cdots$ weist offenbar, wie das ursprüngliche Gleichungsystem in den Variablen $x_1, x_2, \cdots$, keinen offenkundigen Widerspruch auf, d. h. falls $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ solche reelle Zahlen sind, dass durch lineare Kombination der N ersten der neuen Gleichungen mit den Multiplikatoren $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ eine Gleichung der Form

$$0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_L = K$$

entsteht, die Zahl K auf der rechten Seite notwendigerweise gleich 0 sein muss. In der Tat entsteht durch Kombination der N ersten Gleichungen des ursprünglichen Systems mit denselben Multiplikatoren $\sigma_1, \cdots, \sigma_N$ eine Gleichung der Form

$$(4) \qquad \alpha x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \cdots + 0 x_L = \beta,$$

wo die Zahlen K, α, β durch die Relation $K = \beta - \alpha x_1^*$ verbunden sind (weil das neue System aus dem alten System durch Einsetzung von $x_1 = x_1^*$ hervorgegangen ist), und aus der Gleichung $K = \beta - \alpha x_1^*$ erhellt sofort, dass $K = 0$ ist; denn im Falle $\alpha = 0$ muss auch $\beta = 0$ sein (da das ursprüngliche Gleichungsystem (3) sonst einen offenkundigen Widerspruch aufweisen würde), und im Falle $\alpha \neq 0$ bedeutet die Gleichung (4) ja eine »Isolation« von x_1 aus dem ursprünglichen Gleichungsystem, und es ist alsdann der Wert x_1^* gerade gleich der Konstanten $\frac{\beta}{\alpha}$ gewählt.

Wir können daher das Verfahren fortsetzen und bestimmen nunmehr x_2 aus dem neuen Gleichungsystem in genau derselben Weise wie wir x_1 aus dem ursprünglichen System bestimmt haben, d. h. falls x_2 isoliert werden kann, etwa $x_2 = c_2$, setzen wir $x_2 = x_2^* = c_2$, und falls x_2 nicht isoliert werden kann, geben wir x_2 einen beliebig gewählten Wert x_2^*.

Danach setzen wir $x_2 = x_2^*$ in das Gleichungsystem ein, bestimmen $x_3 = x_3^*$, u. s. w.

Durch abzählbar viele Schritte erhalten wir in dieser Weise ein Wertsystem $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$, welches offenbar eine simultane Lösung der unendlich vielen Gleichungen (3) darstellt; in der Tat kommen in jeder dieser Gleichungen, etwa der N^{ten}, nur endlich viele Unbekannte vor, etwa $x_1, \cdots, x_M$, und aus der Bestimmungsweise der Zahlen x^* folgt, dass diese Gleichung nach Einsetzung von $x_1 = x_1^*, \cdots, x_M = x_M^*$ keinen offenkundigen Widerspruch aufweisen darf, also sich auf $0 = 0$ reduzieren muss.

Aus dem Satze 2 folgt, dass die Verhältnisse in bezug auf die in der Einleitungen angegebene Fragestellung ganz anders bei den Gleichungen als bei den Kongruenzen liegen. In der Tat ergibt sich für die Gleichungen der Satz:

Es sei ein System von unendlich vielen Linearformen der Form

$$\varrho_{n,1} x_1 + \varrho_{n,2} x_2 + \cdots + \varrho_{n,q_n} x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

gegeben, und es bezeichne M_1 *die Menge der Punkte* $(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots)$ *des unendlich-dimensionalen Raumes, für welche die Gleichungen*

$$\varrho_{n,1} x_1 + \varrho_{n,2} x_2 + \cdots + \varrho_{n,q_n} x_{q_n} = \vartheta_n \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine simultane Lösung $(x_1^*, x_2^*, \cdots)$ *haben, und* M_2 *die Menge der Punkte* $(\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots)$, *für welche bei jedem festen* N *die* N *ersten dieser Gleichungen eine Lösung* $(x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots)$ *besitzen. Dann ist immer* $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2$. Für die simultane Lösbarkeit sämtlicher Gleichungen ist also nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dass jede endliche Anzahl der Gleichungen eine Lösung besitzen.

In der Tat, falls bei jedem N die N ersten Gleichungen eine Lösung haben, kann das Gleichungsystem gewiss keinen offenkundigen Widerspruch aufweisen, und nach dem Satze 2 genügt dies um schliessen zu können, dass eine simultane Lösung der sämtlichen Gleichungen vorhanden ist.[1]

[1] Der Grund, weshalb die Verhältnisse bei den Gleichungen so ganz anders — und zwar viel einfacher — als bei den Kongruenzen liegen, kann darin gesucht werden, dass es bei einem System von Gleichungen ohneweiteres erlaubt ist (wie wir es oben bei der successiven Isolierungen der Variablen getan haben) durch beliebige lineare Kombinationen der gegebenen Gleichungen neue Gleichungen zu bilden, während die Bildung solcher linearer Kombinationen bei den Kongruenzen nur dann erlaubt ist, falls die verwendeten Multiplikatoren sämtlich ganze Zahlen sind.

§ 2.

Lineare Substitutionen in unendlich vielen Variablen.

Es sei ein System von unendlich vielen Gleichungen der Form

$$(5)\qquad y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n,u_n}x_{u_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

gegeben, wo die Koeffizienten α beliebige reelle Zahlen bedeuten. Durch dieses Gleichungsystem wird jedem gegebenen Punkte $(x_1, x_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen x-Raumes ein eindeutig bestimmter Punkt $(y_1, y_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen y-Raumes zugeordnet. Wir nennen das System (5) eine *lineare Substitution*, falls es eine ein-eindeutige Abbildung des x-Raumes auf den y-Raum bewerkstelligt, falls also die Gleichungen (5) bei jedem gegebenen Wertesystem von $y_1, y_2, \cdots$ eine und nur eine Lösung in den Variablen $x_1, x_2, \cdots$ besitzen.

Satz 3. *Damit das System (5) eine lineare Substitution bilde, ist notwendig und hinreichend:*

1. *dass keine Dependenzen zwischen den Linearformen $L_1, L_2, \cdots$ auf den rechten Seiten der Gleichungen (5) bestehen* (d. h. es darf keine lineare Kombination endlich vieler dieser Linearformen mit nicht sämtlich verschwindenden Multiplikatoren geben, welche identisch in den x verschwindet), *und*

2. *dass jede der Variablen x_m durch lineare Kombination endlich vieler der Linearformen $L_1, L_2, \cdots$ isoliert werden kann.*[1]

[1] Diese zwei Bedingungen können offenbar auch als nur eine Bedingung formuliert werden, nämlich: *es soll jede der Variablen x_m in einer und nur einer Weise aus den Linearformen $L_1, L_2, \cdots$ isoliert werden können,* d. h. zu jeder Variablen x_m soll es ein und nur ein System von endlich vielen, $N = N(m)$, reellen Zahlen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ mit $\sigma_N \neq 0$ so geben, dass in $\sigma_1 L_1 + \sigma_2 L_2 + \cdots + \sigma_N L_N$ die Variable x_m den Koeffizienten 1 und alle übrigen Variablen x die Koeffizienten 0 besitzen.

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Bedingungen notwendig sind, dass sie also gewiss erfüllt sind, falls (5) eine Substitution bildet. Zunächst ist klar, dass keine Dependenz, etwa $\mu_1 L_1 + \cdots + \mu_N L_N = 0$, vorhanden sein kann; denn hieraus würde folgen, dass das Gleichungsystem (5) für einen Punkt $(y_1, y_2, \cdots)$, welcher nicht die entsprechende Bedingung $\mu_1 y_1 + \cdots + \mu_N y_N = 0$ erfüllte, gewiss keine Lösung in den x haben könnte. Und aus dem Beweise des Satzes 2 in § 1 geht ferner hervor, das jede der Variablen x_m isoliert werden kann. In der Tat, da die Gleichungen (5) bei gegebenen Werten von den y nach Voraussetzung eine Lösung besitzen (und also keinen offenkundigen Widerspruch aufweisen), können wir durch das dort angegebene Verfahren eine Lösung bestimmen; wäre nun eine der Variablen nicht isolierbar, könnten wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass gerade die »erste« Unbekannte x_1 nicht isolierbar wäre (indem wir sonst die Unbekannten einfach umnummerierten), und wir könnten alsdann bei unserem Lösungsverfahren dieser Unbekannten x_1 einen ganz beliebigen Wert x_1^* geben, im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass nur eine Lösung existiert.

2. Danach zeigen wir, dass die beiden Bedingungen hinreichend sind. Hierzu schliessen wir zunächst aus der Annahme, dass keine Dependenzen vorhanden sind, dass die Gleichungen (5), wie auch die Werte der y gewählt werden, niemals einen offenkundigen Widerspruch aufweisen können, und daher (nach dem Satze 2) bei beliebig gegebenen $y_1, y_2, \cdots$ mindestens eine Lösung haben. Und dass die Gleichungen nicht mehr als eine Lösung haben können, folgt natürlich sofort daraus, dass jede Variable x isoliert werden kann.

Indem wir an die letzte Bemerkung des obigen Beweises anknüpfen, fügen wir hinzu, dass — falls (5) eine Substitution bildet — die Werte der Variablen x, bei gegebenen Werten der y, durch Isolierung der x bestimmt werden können. Diese Isolation (die, wie wir wissen, in einer und nur einer Weise möglich ist) verläuft aber unabhängig davon, welche Werte den Variablen y auf den linken Seiten von (5) zugeteilt sind, und wir erhalten daher die Lösung in der Form

$$(6) \qquad x_n = \beta_{n,1} y_1 + \beta_{n,2} y_2 + \cdots + \beta_{n,v_n} y_{v_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

wo die β Konstanten sind, die nur von den Konstanten α in (5) abhängen. Dieses neue System (6) bestimmt offenbar dieselbe ein-eindeutige Abbildung des x-Raumes auf den y-Raum wie (5), und bildet daher ebenfalls eine Substitution, die wir als die zu (5) inverse Substitution bezeichnen. Natürlich ist umgekehrt (5) die inverse Substitution zu (6).

Beispiel. Als einfachstes Beispiel einer linearen Substitution nennen wir ein System von Gleichungen der Form

$$(7) \qquad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = \alpha_{1,1} x_1 \\ y_2 = \alpha_{2,1} x_1 + \alpha_{2,2} x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = \alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n,n} x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \qquad (\alpha_{n,n} \neq 0 \text{ für alle } n).$$

Dass dieses System (7) eine Substitution bildet, sieht man sofort sowohl daraus, dass die in der Definition geforderte Ein-eindeutigkeit der Abbildung vorhanden ist, als auch daraus, dass die im Satze 3 angegebenen Bedingungen des Nicht-Vorhandenseins von Dependenzen und der Isolierbarkeit der x erfüllt sind. Wir finden hier sofort durch successive Bestimmung von $x_1, x_2, \cdots$ die inverse Substitution, welche dieselbe Form

$$(8)\quad \begin{cases} x_1 = \beta_{1,1}\, y_1 \\ x_2 = \beta_{2,1}\, y_1 + \beta_{2,2}\, y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \beta_{n,1}\, y_1 + \beta_{n,2}\, y_2 + \cdots + \beta_{n,n}\, y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \qquad \left(\beta_{n,n} = \frac{1}{\alpha_{n,n}}\right)$$

erhält.

Wir schliessen diesen Paragraphen mit einigen für das Folgende nützlichen Bemerkungen:

Bemerkung I. (»Verlängerung« eines Systems). Es sei $L_1,\ L_2, \cdots$ eine Folge von unendlich (oder vielleicht nur endlich) vielen Linearformen in den unendlich vielen Variablen $x_1,\ x_2, \cdots$, wo jede der Linearformen wie immer nur endlich viele der Variablen x enthält, und es sei vorausgesetzt, dass *keine Dependenzen zwischen den Linearformen bestehen*. Daraus folgt natürlich nicht, dass das Gleichungsystem

$$(9)\qquad y_1 = L_1,\ y_2 = L_2, \cdots,$$

welches jeden Punkt des x-Raumes auf einen Punkt des y-Raumes abbildet, eine Substitution bildet; wir können wohl aus dem Satze 2 des § 1 folgern, dass die Gleichungen (9) bei beliebig gegebenen y mindestens eine Lösung in den x besitzen, aber im Allgemeinen wird es mehrere (unendlich viele) solche Lösungen geben, weil wir nicht vorausgesetzt haben, dass jede der Variablen x aus den Linearformen L isoliert werden kann.

Wir werden aber zeigen, dass das System (9) (falls es nicht zufällig schon eine Substitution bildet) immer in einfachster Weise *zu einer Substitution »verlängert« werden kann*, indem der Raum $y_1,\ y_2, \cdots$ durch Hinzufügung neuer Variabeln $\eta_1, \eta_2, \cdots$ erweitert wird, und dass diese »Verlängerung« einfach so vorgenommen werden kann, *dass dem System (9) eine (endliche oder unendliche) Folge von Gleichungen der Form*

$$\eta_\nu = x_{n_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

hinzugefügt wird.[1] Hierzu gehen wir folgendermassen vor: Es sei x_{n_1} die erste Variable x (d. h. die mit dem kleinsten Index), welche aus den gegebenen Linearformen L nicht isoliert werden kann. Wir fügen dann dem Gleichungsystem (9) die neue Gleichung $\eta_1 = x_{n_1}$ zu, und behaupten, dass in dem so erweiterten System von Linearformen (welches also aus den L und der neuen Form $L'_1 = x_{n_1}$ besteht) ebenfalls keine Dependenzen vorkommen. Denn, falls die lineare Kombination

$$\mu_1 L_1 + \mu_2 L_2 + \cdots + \mu_N L_N + \mu' x_{n_1}$$

identisch in den x verschwindet, muss erstens $\mu' = 0$ sein (weil x_{n_1} sonst aus den L isolierbar wäre), und danach folgt weiter, dass auch $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_N$ gleich 0 sein müssen (weil das L-System nach Voraussetzung keine Dependenzen enthält). Wir haben nun einfach in dieser Weise fortzusetzen, d. h. wir fügen nun unserem neuen Gleichungsystem

$$y_1 = L_1, \; y_2 = L_2, \cdots; \quad \eta_1 = x_{n_1}$$

die Gleichung $\eta_2 = x_{n_2}$ hinzu, wobei x_{n_2} $(n_2 > n_1)$ die erste der Variablen x bezeichnet, welche aus den rechten Seiten der Gleichungen nicht isoliert werden kann; bei dieser Hinzufügung können, nach dem obigen, gewiss keine Dependenzen auftauchen. Durch unendlich (oder vielleicht nur endlich)

[1] Hierbei denken wir uns natürlich, dass die neuen Gleichungen $\eta_\nu = x_{n_\nu}$ dem ursprünglichen Gleichungsystem (9) so eingefügt werden, dass das Gesamtsystem in der Form einer (durch die Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ numerierten) Folge von Gleichungen erscheint.

viele Schritte gelangen wir dann zu einem Gleichungsystem, das offenbar eine Substitution zwischen dem x-Raum und dem y-η-Raum bildet; denn einerseits besteht keine Dependenz zwischen den Linearformen $L_1, L_2, \cdots, x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots$, und andererseits kann jede der Variablen x aus diesen Linearformen isoliert werden.

Bemerkung II. (»Verkürzung« eines Systems). Es sei

$$(5) \qquad y_n = \alpha_{n,1} x_1 + \alpha_{n,2} x_2 + \cdots + \alpha_{n,u_n} x_{u_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine Substitution, welche den unendlich-dimensionalen x-Raum auf den unendlich-dimensionalen y-Raum abbildet, und es sei $n_1, n_2, \cdots$ eine beliebig gegebene Folge von (endlich oder unendlich vielen) positiven ganzen Zahlen, welche nur nicht gerade die gesamte Zahlenreihe $1, 2, \cdots$ ausmachen. Wir wollen in (5) *die Variablen $y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots$ fortlassen und doch immer eine Substitution zurück behalten,* und zwar werden wir versuchen, dies einfach dadurch zu erreichen, dass *eine gewisse Folge $x_{m_1}, x_{m_2}, \cdots$ von den Variablen x ebenfalls aus (5) gestrichen wird.*

Hierzu streichen wir zunächst aus dem Gleichungsystem (5) die Gleichungen mit den Nummern $n_1, n_2, \cdots$, so dass die erwähnten Variablen $y_{n_1}, y_{n_2}, \cdots$ nicht mehr vorkommen. In den zurück gebliebenen Gleichungen sind die Linearformen $l_1, l_2, \cdots$ auf den rechten Seiten gewiss dependenzfrei (weil ja sogar das Gesamtsystem $L_1, L_2, \cdots$ dependenzfrei ist). Dagegen wird nicht mehr jede der Variablen x isolierbar sein.[1] Es sei nun x_{m_1} die erste der Variablen x,

[1] In der Tat muss für mindestens eine der Variablen x, welche in der Linearform L_{n_1} vorkommt, gelten, dass bei ihrer (nur in einer Weise möglichen) Isolierung aus den Linearformen $L_1, L_2, \cdots$, diese Linearform L_{n_1} tatsächlich verwendet wird, weil sonst L_{n_1} durch eine lineare Kombination von anderen der Linearformen L ausgedrückt werden könnte (und das L-System also nicht dependenzfrei wäre).

welche nicht aus den zurückgebliebenen Linearformen $l_1, l_2, \cdots$ isoliert werden kann. Wir streichen dann einfach x_{m_1} aus allen diesen Linearformen $l_1, l_2, \cdots$ und bezeichnen die hierdurch entstandenen Linearformen in den übrigen Variablen x mit $l'_1, l'_2, \cdots$. Es ist klar, einerseits, dass jedes x, welches aus den Linearformen l_1, l_2 isoliert werden kann, ebenfalls aus den neuen Linearformen $l'_1, l'_2 \cdots$ isoliert werden kann, und zwar durch dieselbe Kombination, d. h. unter Benutzung der entsprechenden Linearformen und derselben Multiplikatoren (weil die Formen l' aus den Formen l einfach durch Weglassung der Glieder mit x_{m_1} entstanden sind), und andererseits, dass das neue System $l'_1, l'_2, \cdots$ ebenfalls keine Dependenzen enthält; in der Tat führt die Annahme der Existenz einer solchen Dependenz, etwa $\mu_1 l'_1 + \cdots + \mu_N l'_N = 0$, sofort zu einem Widerspruch, weil alsdann $\mu_1 l_1 + \cdots + \mu_N l_N = c x_{m_1}$ sein müsste, und dies offenbar unmöglich ist (denn $c = 0$ würde bedeuten, dass eine Dependenz zwischen den l stattfände, und $c \neq 0$, dass x_{m_1} aus den l isolierbar wäre). Wir setzen nun in dieser Weise fort, d. h. streichen aus den Linearformen l' die erste Variable x_{m_2} $(m_2 > m_1)$, welche nicht aus den l' isolierbar ist, u. s. w. Durch unendlich (oder vielleicht nur endlich) viele Schritte gelangen wir offenbar zu einer Substitution zwischen den zurückgeblieben x und den zurückgebliebenen y; denn zwischen den endgültig erhaltenen Linearformen auf den rechten Seiten bestehen keine Dependenzen, und jede der zurückgebliebenen x ist aus diesen Linearformen isolierbar.

Wir fügen noch hinzu, dass falls die gegebene Folge $n_1, n_2, \cdots$ aus sämtlichen positiven ganzen Zahlen bis auf endlich viele besteht, also nur endlich viele y zurückgelassen werden, auch nur endlich viele x (und zwar genau ebensoviele) zurückbleiben können; wir erhalten also eine »gewöhnliche« Substitution zwischen zwei Systemen von endlich vielen Variablen.

Bemerkung III. Falls in einer Substitution (5) die Koeffizienten α alle rationale Zahlen sind, werden die Koeffizienten β der inversen Substitution ebenfalls sämtlich rational sein. In der Tat folgt aus einem Satz der elementaren Algebra[1], dass eine Variable x_m, welche aus einem System von Linearformen mit rationalen Koeffizienten isoliert werden kann, gewiss auch mit Hülfe lauter rationaler Multiplikatoren isoliert werden kann, und bei den Linearformen einer Substitution, wo die Isolierung der Variablen nur in einer Weise möglich ist, müssen also gewiss die zu verwendenden Multiplikatoren, d. h. gerade die Koeffizienten β der inversen Substitution, alle rational ausfallen.

Ferner bemerken wir, dass bei der in Bemerkung I bezw. II betrachteten »Verlängerung« bezw. »Verkürzung« eines Systems von Linearformen, die Koeffizienten des neuen Systems alle rational werden, falls die Koeffizienten des ursprünglichen Systems rational waren.

Im Folgenden werden wir überall, wo von einer linearen Substitution oder einem System von Linearformen die Rede ist, stillschweigend voraussetzen, dass die Koeffizienten sämtlich rationale Zahlen sind.

[1] Nämlich aus dem Satze, dass, wenn ein System von endlich vielen linearen Gleichungen mit endlich vielen Unbekannten, in welchem alle auftretenden Konstanten rationale Werte haben, überhaupt lösbar ist, es gewiss auch eine Lösung in lauter rationalen Zahlen hat.

§ 3.

Eine einfache Reduktion des gegebenen Systems von Linearformen.

Wir nennen zwei Systeme von Linearformen

$$(1) \qquad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

und

$$(10) \qquad s_{n,1}y_1 + s_{n,2}y_2 + \cdots + s_{n,p_n}y_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

unter einander *aequivalent*, wenn das erste System aus dem zweiten durch eine lineare Substitution (5) (und damit das zweite aus dem ersten durch die inverse Substitution (6)) hervorgeht. Es ist klar, dass die Anwendung einer linearen Substitution die beiden in der Einleitung definierten Punktmengen Π_1 und Π_2 unberührt lässt, d. h. *dass zu zwei aequivalenten Systemen sowohl dieselbe Menge Π_1 als auch dieselbe Menge Π_2 gehören.* In der Tat, falls $(x_1, x_2, \cdots)$ eine Lösung der sämtlichen (bezw. der N ersten) der Kongruenzen

$$r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv \theta_n \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

ist, wird der (durch die Substitution bestimmte) Bildpunkt $(y_1, y_2, \cdots)$ eine Lösung der sämtlichen (bezw. der N ersten) Kongruenzen

$$s_{n,1}y_1 + s_{n,2}y_2 + \cdots + s_{n,p_n}y_{p_n} \equiv \theta_n \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

sein.

Wir werden ein System (1) »*ganzartig*« nennen, falls *es mit einem System (10) mit lauter ganzen Koeffizienten s aequivalent ist.* Da die Zusammensetzung zweier Substitutionen wieder eine Substitution ergibt, wird, falls von zwei aequivalenten Systemen das eine ganzartig ist, das andere ebenfalls ganzartig sein. Wie in der Einleitung angegeben, ist das Ziel der vorliegenden Abhandlung zu beweisen, dass es für das Zusammenfallen der beiden zu einem System (1) gehörigen Mengen Π_1 und Π_2 notwendig und hinreichend ist, dass das System ganzartig ist. Aus dem Obigen folgt unmittelbar, dass es beim Beweise dieses Satz ohne weiteres erlaubt ist, statt des gegebenen Systems (1), ein beliebiges anderes mit (1) aequivalentes System zu betrachten; denn der Übergang zu einem aequivalenten System ändert ja weder die Mengen Π_1 und Π_2 noch die Ganzartigkeit oder Nicht-Ganzartigkeit des Systems. Mit Hilfe dieser Bemerkung werden wir in diesem Paragraphen zeigen, dass wir uns im folgenden *auf die Betrachtung solcher Systeme beschränken können, in welchen jede der Variablen (in mindestens einer Weise) isoliert werden kann.* Wir gehen hierbei schrittweise vor, indem wir zunächst von dem gegebenen System (1) zu einem mit (1) äquivalenten System übergehen, in welchem jede der Variablen welche tatsächlich vorkommt (d. h. nicht überall den Koefficienten 0 hat) isoliert werden kann, und dann nachher das so gewonnene System in ein System der gewünschten Art überführen, in welchem überhaupt jede der Variablen isoliert werden kann.

1^0. Wir bezeichnen zur Abkürzung die m^{te} Linearform in (1) mit L_m, und setzen $L_{m_1} = y_1$, wo $m_1 = 1$ ist. Danach ersetzen wir jede der Linearformen $L_{m_1+1}, L_{m_1+2}, \cdots$, welche in der Form $R_1 L_{m_1}$ mit einem konstanten (rationalen) Faktor R_1 geschrieben werden kann, durch $R_1 y_1$. Wir setzen alsdann $L_{m_2} = y_2$, wo L_{m_2} die erste der Linearformen L_{m_1+1}, $L_{m_1+2}, \cdots$ bezeichnet, welche nicht diese Form $R_1 L_{m_1}$ hat, und ersetzen jede dieser Linearformen, welche in der Form $R_1 L_{m_1} + R_2 L_{m_2}$ mit konstanten (rationalen) R_1, R_2 ($R_2 \neq 0$) geschrieben werden kann, durch $R_1 y_1 + R_2 y_2$. Danach setzen wir $L_{m_3} = y_3$, wo L_{m_3} die erste der Linearformen

L_{m_2+1}, $L_{m_2+2}, \cdots$ bedeutet, welche nicht diese Form $R_1 L_{m_1} + R_2 L_{m_2}$ hat, und ersetzen jede dieser Linearformen, welche in der Form $R_1 L_{m_1} + R_2 L_{m_2} + R_3 L_{m_3}$ (mit $R_3 \neq 0$) geschrieben werden kann, durch $R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3$, u. s. w. Nach unendlich (oder vielleicht nur endlich) vielen Schritten,

$$(11) \qquad L_{m_1} = y_1, \; L_{m_2} = y_2, \; L_{m_3} = y_3, \cdots,$$

erhalten wir somit aus dem System (1) ein neues System von Linearformen in den Variablen y_1, $y_2, \cdots$, welches wir mit

$$(12) \qquad t_{n,1} y_1 + t_{n,2} y_2 + \cdots + t_{n,p_n} y_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

bezeichnen. *In diesem System (12) kann offenbar jede der Variablen y isoliert werden*; es kommen sogar unter den Linearformen (12) die einzelnen Variablen y_1, $y_2, \cdots$ isoliert vor.

Wir können aber nicht unmittelbar behaupten, dass dieses System (12) mit dem Ausgangsystem (1) aequivalent ist; denn es brauchen ja die Gleichungen (11) keine Substitution zu bilden; in der Tat folgt aus der Wahl der Linearformen L_{m_1}, $L_{m_2}, \cdots$ nur, dass sie keine Dependenzen aufweisen, aber nicht, dass jede der Variablen x aus ihnen isoliert werden kann. Über diese anscheinende Schwierigkeit können wir aber sofort mit Hülfe der Bemerkung I in § 2 hinwegkommen; in der Tat können wir nach dieser Bemerkung das Gleichungsystem (11) durch Hinzufügung neuer Gleichungen der Form

$$x_{n_1} = \eta_1, \quad x_{n_2} = \eta_2, \cdots$$

zu einer Substitution »verlängern«, welche den Raum der Variablen x auf den durch die Variablen y_1, $y_2, \cdots$ und η_1, $\eta_2, \cdots$ gebildeten Raum abbildet, und durch Anwendung dieser Substitution auf das System (1) ergibt sich ja gerade das obige System (12), indem die neuen Variablen $\eta_1, \eta_2, \cdots$ gar nicht zum Vorschein kommen.

2⁰. Man könnte versucht sein zu glauben, dass wir jetzt am Ziele waren. In der Tat, falls das neue System (12) mit dem gegebenen System (1) aequivalent ist, können wir ja ebensogut das System (12) wie das System (1) bei der Behandlung unserer Aufgabe zu Grunde legen. Man muss aber bedenken, dass das System (12) nur dann mit dem System (1) aequivalent ist, wenn (12) als ein System in den Variablen $y_1, y_2, \cdots$ und $\eta_1, \eta_2, \cdots$ betrachtet wird, und dass es ja nur die y sind, welche aus dem System isoliert werden können, und nicht auch die η (welche überhaupt nicht in den Linearformen auftreten). Es muss daher noch bewiesen werden, dass es für unsere Aufgabe gleichgültig ist, ob wir das System (12) als ein System in den Variablen y und η, oder als ein System in den Variablen y allein betrachten. Es ist unmittelbar klar, das die beiden Mengen Π_1 und Π_2 davon unabhängig sind, welchen von diesen beiden Gesichtspunkten wir anlegen, und es handelt sich daher nur darum zu zeigen, dass auch die eventuelle Ganzartigkeit des Systems (12) nicht davon abhängt, ob wir die y allein, oder die y und η als die Variablen betrachten. Hierzu bemerken wir zunächst, dass, falls das System als Funktion der y allein betrachtet ganzartig ist — also durch eine Substitution $(y_1, y_2, \cdots) \rightarrow (z_1, z_2, \cdots)$ in ein System in $z_1, z_2, \cdots$ mit ganzen Koeffizienten übergeführt werden kann — es eo ipso auch als Funktion von y und η betrachtet ganzartig ist; wir haben ja nur der benutzten Substitution $(y_1, y_2, \cdots) \rightarrow (z_1, z_2, \cdots)$ die Gleichungen $\eta_1 = \xi_1, \eta_2 = \xi_2, \cdots$, wo die ξ neue Variablen bedeuten, hinzuzufügen, um eine Substitution $(y_1, y_2, \cdots; \eta_1, \eta_2, \cdots) \rightarrow$

$(z_1, z_2, \cdots; \xi_1, \xi_2, \cdots)$ zu erhalten, welche unser System (12) in ein System mit lauter ganzen Koeffizienten in den Variablen $z_1, z_2, \cdots; \xi_1, \xi_2, \cdots$ überführt. Wir haben danach zu beweisen, dass, falls das System (12) als Funktion der y und η betrachtet ganzartig ist — also durch eine Substitution, welche den y-η-Raum auf einen z-Raum abbildet, in ein System in $z_1, z_2, \cdots$ mit ganzen Koeffizienten übergeführt werden kann —, das System (12) auch als Funktion von den y allein betrachtet ganzartig ist. Dies folgt aber sofort aus der Bemerkung II in § 2 über die »Verkürzung« einer Substitution. In der Tat können wir nach dieser Bemerkung aus der benutzten Substitution $(y_1, y_2, \cdots; \eta_1, \eta_2, \cdots) \rightarrow (z_1, z_2, \cdots)$ durch einfache Streichung der Variablen $\eta_1, \eta_2, \cdots$ und gewisser Variablen $z_{n_1}, z_{n_2}, \cdots$ eine neue Substitution erhalten, welche den y-Raum auf einen »Unterraum« des z-Raumes abbildet, und durch diese Substitution geht gewiss das System (12) in ein System mit lauter ganzen Koeffizienten über, nämlich in dasjenige System, welches aus dem obigen System in den Variabeln $z_1, z_2, \cdots$ dadurch hervorgeht, dass die Variabeln $z_{n_1}, z_{n_2}, \cdots$ überall gestrichen werden.

3⁰. Wir können somit statt des gegebenen Systems (1) ebensogut das neue System

$$(12) \qquad t_{n,1}\, y_1 + t_{n,2}\, y_2 + \cdots + t_{n,p_n}\, y_{p_n} \qquad (n = 1, 2 \cdots)$$

(als Funktion der Variablen $y_1, y_2, \cdots$ allein betrachtet) zu Grunde legen, aus welchem jede der Variablen $y_1, y_2, \cdots$ isoliert werden kann. Hierbei ist aber noch zu bedenken, dass wir jetzt nach dieser Reduktion zwei verschiedene Fälle unterscheiden müssen, nämlich denjenigen, wo die Variablen $y_1, y_2, \cdots$ eine unendliche Folge bilden, und denjenigen, wo es nur endlich viele Variabeln, etwa

$y_1, \cdots, y_M$ gibt. Um Wiederholungen zu vermeiden, ziehen wir aber vor, statt den letzteren (wesentlich einfacheren) Fall für sich zu behandeln, lieber gleich zu zeigen, dass dieser Fall auf den von unendlich vielen Variabeln direkt zurückgeführt werden kann. In der Tat brauchen wir nur dem System (12) in den Variabeln $y_1, \cdots, y_M$ die (unendlich vielen) neuen Linearformen

$$L' = y_{M+1}, \; L'' = y_{M+2}, \; L''' = y_{M+3}, \cdots$$

hinzuzufügen, um ein System in den unendlich vielen Variabeln $y_1, y_2, \cdots$ zu erhalten, welches für unsere Aufgabe mit (12) ganz gleichwertig ist. Denn falls die Gleichung $\Pi_1 = \Pi_2$ für das System (12) besteht, wird sie offenbar auch für das erweiterte System gelten (und umgekehrt). Und ferner werden die beiden Systeme auch gleichzeitig ganzartig sein; in der Tat, falls das System (12) in den Variabeln $y_1, \cdots, y_M$ ganzartig ist, wird das erweiterte System eo ipso auch ganzartig sein (wie durch Erweiterung der benutzten Substitution $(y_1, \cdots, y_M) \rightarrow (z_1, \cdots, z_M)$ mit den Gleichungen $y_{M+1} = z_{M+1}, y_{M+2} = z_{M+2}, \cdots$ unmittelbar hervorgeht), und umgekehrt, falls das erweiterte System ganzartig ist, wird auch das System (12) ganzartig sein (wie durch »Verkürzung« der benutzten Substitution $(y_1, y_2, \cdots) \rightarrow (z_1, z_2, \cdots)$ durch Streichung der Variablen $y_{M+1}, y_{M+2}, \cdots$ und entsprechender der Variablen z sofort zu sehen ist).

Wir können also im folgenden ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, *dass das gegebene System (1) tatsächlich alle die unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ enthält, und dass jede dieser Variablen aus dem System isoliert werden kann.* Ein solches System werden wir als ein »*reduziertes*« System in den unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \cdots$ bezeichnen.

§ 4.

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die „Ganzartigkeit" eines (reduzierten) Systems von Linearformen.

Die gesuchten Kriterien der Ganzartigkeit eines reduzierten Systems in unendlich vielen Variablen

$$(1) \qquad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

beruhen auf die Betrachtung der unendlich vielen »*Nullkongruenzen*«

$$(13)\ r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv 0\ (\mathrm{mod.}1)\ (n = 1,2,\cdots),$$

welche aus den unendlich vielen Linearformen (1) entstehen, wenn jede dieser Formen $\equiv 0$ (mod. 1) gesetzt wird. Es bezeichne Γ die Punktmenge des unendlich-dimensionalen Raumes, welche aus den sämtlichen simultanen Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ dieser unendlich vielen Nullkongruenzen besteht; diese Punktmenge Γ ist gewiss nicht leer, da sie jedenfalls den Anfangspunkt des Raumes $(0, 0, 0, \cdots)$ enthält. Ferner bezeichne Γ_m bei jedem festen $m = 1, 2, \cdots$ die Projektion der Punktmenge Γ auf den m-dimensionalen Unterraum $x_1, \cdots, x_m$, d. h. es gehöre zu Γ_m jeder Punkt $(x_1, \cdots, x_m)$, welcher durch Hinzufügung passend gewählter unendlich vieler Koordinaten $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots$ zu einem Punkte der Menge Γ »ergänzt« werden kann. Es ist klar, dass Γ_m auch die Projektion jeder der Punktmengen $\Gamma_{m+1}, \Gamma_{m+2}, \cdots$ auf den m-dimensionalen Unterraum darstellt.

Wir beweisen zunächst den

Satz 4. *Es ist die Menge Γ eindeutig bestimmt, wenn man* *ihre sämtlichen Projektionen* $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots$ *kennt*[1], *und zwar ist* Γ *die »grösste« Menge, welche die Mengen* Γ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ *als Projektionen besitzt; d. h. damit ein Punkt* $(x_1, x_2, \cdots)$ *zu* Γ *gehöre, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dass bei jedem* m *der »abgeschnittene« Punkt* $(x_1, \cdots, x_m)$ *in* Γ_m *liegt.*

Beweis. In der Tat, es sei $(x_1, x_2, \cdots)$ ein beliebiger solcher Punkt, dass bei jedem m der abgeschnittene Punkt $(x_1, \cdots, x_m)$ in Γ_m liegt. Wir haben zu beweisen, dass dieser Punkt $(x_1, x_2, \cdots)$ zu Γ gehört, also dass er eine (simultane) Lösung der Kongruenzen (13) darstellt, d. h. bei beliebig gewähltem N die N^{te} Kongruenz befriedigt. Es bezeichne hierzu M den grössten Index eines x, welches in dieser N^{ten} Kongruenz vorkommt. Nach Voraussetzung gehört der abgeschnittene Punkt $(x_1, \cdots, x_M)$ zu Γ_M, d. h. er kann zu einem Punkte $(x_1, \cdots, x_M, \overset{*}{x}_{M+1}, \overset{*}{x}_{M+2}, \cdots)$ ergänzt werden, welcher zu Γ gehört und somit die sämtlichen Kongruenzen (13), also auch die N^{te} Kongruenz erfüllt. Hieraus folgt aber, dass auch der ursprüngliche Punkt $(x_1, x_2, \cdots, x_M, x_{M+1}, \cdots)$ die N^{te} Kongruenz erfüllt, weil ja bei einer Lösung dieser Kongruenz ganz gleichgültig ist, welche Werte die Koordinaten nach der M^{ten} Stelle besitzen.

Wir werden nunmehr die Struktur der Punktmengen Γ_m näher untersuchen. Hierzu beweisen wir zunächst den

Satz 5. *Es bildet bei jedem* $m = 1, 2, \cdots$ *die Punktmenge*

[1] Im Allgemeinen ist eine Punktmenge Ω des unendlich-dimensionalen Raumes n i c h t eindeutig bestimmt, wenn man bei jedem $m = 1, 2, \cdots$ ihre Projektion Ω_m auf den m-dimensionalen Unterraum $x_1, \cdots, x_m$ kennt. So haben z. B. die beiden Punktmengen Ω' und Ω'', wo Ω' aus den sämtlichen Punkten des unendlich-dimensionalen Raumes besteht, und Ω'' aus allen solchen Punkten, unter deren Koordinaten unendlich viele Nullen vorkommen, bei jedem m dieselbe Projektion $\Omega'_m = \Omega''_m$, nämlich beide Mal den ganzen m-dimensionalen Raum.

Γ_m ein »Gitter«, d. h. es gibt eine ganze Zahl p $(0 \leqq p \leqq m)$ und p linear unabhängige Punkte

$$(x'_1, \cdots, x'_m),\ (x''_1, \cdots, x''_m),\ \cdots,\ (x_1^{(p)}, \cdots\ x_m^{(p)})$$

derart, dass die Punktmenge Γ_m gerade aus den ganzzahligen Kombinationen dieser Punkte besteht, d. h. aus allen Punkten der Form

$$(x_1, \cdots, x_m) =$$
$$n_1(x'_1, \cdots, x'_m) + n_2(x''_1, \cdots, x''_m) + \cdots + n_p(x_1^{(p)}, \cdots, x_m^{(p)}),$$

wo $n_1, n_2, \cdots, n_p$ unabhängig von einander alle ganzen Zahlen durchlaufen[1]. Hierbei heisst p die Dimension des Gitters.

Beweis. Damit eine gegebene Punktmenge des m-dimensionalen Raumes ein Gitter bilde, ist bekanntlich nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, 1) dass, falls $(x'_1, \cdots, x'_m)$ und $(x''_1, \cdots, x''_m)$ zwei beliebige (verschiedene oder gleiche) Punkte der Menge bedeuten, der »Differenzpunkt« $(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m)$ ebenfalls zur Menge gehört, und 2) dass der Anfangspunkt $(0, 0, \cdots, 0)$ kein Häufungspunkt der Menge ist. Diese beiden Forderungen sind aber gewiss für unsere Menge Γ_m erfüllt. In der Tat:

1. Falls $(x'_1, \cdots, x'_m)$ und $(x''_1, \cdots, x''_m)$ zwei Punkte der Menge Γ_m sind, können sie durch Hinzufügung passend gewählter Werte der Koordinaten $x_{m+1}, \cdots,$ zu zwei Punkten

$$(x'_1, \cdots, x'_m, x'_{m+1}, \cdots) \quad \text{und} \quad (x''_1, \cdots, x''_m, x''_{m+1}, \cdots)$$

der Menge Γ ergänzt werden. Aus der Definition der Menge Γ (als der Menge der Lösungen der Nullkongruenzen (13)) folgt aber, dass der Differenzpunkt

$$(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m, x'_{m+1} - x''_{m+1}, \cdots)$$

[1] Für $p = 0$ besteht die Punktmenge nur aus dem einzigen Punkte $(x_1, \cdots, x_m) = (0, \cdots, 0)$.

dann ebenfalls zu Γ gehört; die Projektion dieses Punktes auf den m-dimensionalen Unterraum, d. h. der Punkt $(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m)$, ist also ein Punkt von Γ_m.

2. Dass der Anfangspunkt $(0, 0, \cdots, 0)$ kein Häufungspunkt von Γ_m ist, ergibt sich sofort daraus, dass das System (1) reduziert ist, und also jede der Variablen x_l aus den gegebenen Linearformen (1) isoliert werden kann. In der Tat, falls G_l den Hauptnenner der (endlich vielen) rationalen Multiplikatoren bezeichnet, welche bei einer Isolierung von x_l verwendet werden, können wir durch lineare Kombination endlich vieler der Nullkongruenzen (13) mit ganzzahligen Multiplikatoren die neue Nullkongruenz

$$G_l x_l \equiv 0 \pmod{1}$$

ableiten, so dass in jeder Lösung $(x_1, x_2, \cdots)$ des Kongruenzensystems (13), d. h. in jedem Punkte $(x_1, x_2, \cdots)$ der Menge Γ, auf der l^{ten} Stelle eine rationale Zahl der Form $x_l = \frac{n}{G_l}$ (n ganz) stehen muss, womit natürlich gezeigt ist, dass der Anfangspunkt des m-dimensionalen Raumes kein Häufungspunkt von Γ_m ist.

Wir sagen von einem Gitter des m-dimensionalen Raumes, dass es ein echtes Gitter bildet, falls die Dimension p des Gitters mit der Dimension m des Raumes übereinstimmt. Damit ein Gitter (wie unser Γ_m), welches aus lauter Punkten mit rationalen Koordinaten besteht, ein echtes Gitter sei, ist bekanntlich nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig, dass jede der m Koordinatenachsen mindestens einen vom Anfangspunkte verschiedenen Punkt des Gitters enthalte, also dass es m von 0 verschiedene Zahlen $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ derart gibt, dass die m Punkte

$$(\gamma_1, 0, 0, \cdots, 0), \ (0, \gamma_2, 0, \cdots, 0), \cdots, \ (0, 0, \cdots, 0, \gamma_m)$$

alle zum Gitter gehören.

Wir gelangen nunmehr zu dem wichtigen

Satz 6. *Damit das System (1) ganzartig sei, ist notwendig und hinreichend, dass bei jedem $m = 1, 2, \cdots$ die Projektion Γ_m der (aus den simultanen Lösungen der Nullkongruenzen (13) bestehenden) Menge Γ ein e c h t e s Gitter des m-dimensionalen Raumes bildet.*

Beweis. 1. Wir zeigen zunächst, dass, falls das System

$$(1) \qquad r_{n,1} x_1 + r_{n,2} x_2 + \cdots + r_{n,q_n} x_{q_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

g a n z a r t i g ist, d. h. durch eine lineare Substitution

$$(6) \qquad x_n = \beta_{n,1} y_1 + \beta_{n,2} y_2 + \cdots + \beta_{n,v_n} y_{v_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

in ein neues System

$$(14) \qquad g_{n,1} y_1 + g_{n,2} y_2 + \cdots + g_{n,p_n} y_{p_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

mit lauter g a n z e n Koeffizienten g übergeführt werden kann, die Menge Γ_m bei jedem m ein e c h t e s Gitter bildet, dass also auf jeder der Koordinatenachsen des m-dimensionalen Raumes ein vom Anfangspunkte verschiedener Punkt existiert, welcher zu Γ_m gehört. Hierzu betrachten wir gleichzeitig mit den Nullkongruenzen

$$(13) \quad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv 0 \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

deren simultane Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ die Punktmenge Γ bilden, das aequivalente System von Nullkongruenzen

$$(15) \quad g_{n,1}y_1 + g_{n,2}y_2 + \cdots + g_{n,p_n}y_{p_n} \equiv 0 \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Da die Linearformen auf den linken Seiten von (15) aus den Linearformen auf den linken Seiten von (13) durch die lineare Substitution (6) hervorgegangen sind, ist unmittelbar klar, dass die aus den simultanen Lösungen $(y_1, y_2, \cdots)$ dieses neuen Kongruenzensystems (15) bestehende Menge Γ^* gerade die mit Hülfe der Substitution (6) gebildete Bildmenge der Menge Γ ist. Zu dieser Menge Γ^* des unendlich-dimensionalen y-Raumes gehört aber gewiss — weil die Koeffizienten g der Kongruenzen (15) alle ganz sind — jeder Punkt $(y_1, y_2, \cdots)$, dessen Koordinaten sämtlich ganze Zahlen sind. Somit gehört gewiss zur Menge Γ jeder Punkt des unendlich-dimensionalen x-Raumes, welcher (durch unsere Substitution) Bildpunkt eines Punktes des y-Raumes mit lauter ganzzahligen Koordinaten ist. Es bezeichne nun l den grössten Index eines y, welches in den m ersten Gleichungen der Substitution (6) vorkommt, und G den Hauptnenner aller Koeffizienten α, welche in den l ersten Gleichungen der inversen Substitution

$$(5) \qquad y_n = \alpha_{n,1}x_1 + \alpha_{n,2}x_2 + \cdots + \alpha_{n,u_n}x_{u_n} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

auftreten. Wir werden zeigen, das bei jedem $\nu = 1, \cdots m$ der Punkt des m-dimensionalen Raumes $(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots x_m^{(\nu)})$ mit den Koordinaten

$$x_\nu^{(\nu)} = G, \quad x_\mu^{(\nu)} = 0 \text{ für } \mu \neq \nu \, (1 \leqq \mu \leqq m)$$

zur Menge Γ_m gehört. Hierzu setzen wir in den oben genannten l ersten Gleichungen der Substitution (5) $x_\nu = G$, $x_n = 0$ für alle $n \neq \nu$, und bezeichnen die dabei herauskommenden, nach der Bestimmung von G gewiss ganzzahligen Werte von $y_1, \cdots, y_l$ mit $Y_1, \cdots, Y_l$. Der Punkt $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_l, 0, 0, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen y-Raumes gehört wegen der Ganzzahligkeit aller seiner Koordinaten zur Menge Γ^*, und sein Bildpunkt $(X_1, X_2, \cdots)$ des x-Raumes muss daher ein Punkt von Γ sein. In diesem letzten Punkte $(X_1, X_2, \cdots)$ müssen aber auf den m ersten

Stellen gerade die Zahlen $x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots, x_m^{(\nu)}$ stehen — womit also gezeigt ist, dass der Punkt $(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)} \cdots, x_m^{(\nu)})$ tatsächlich zur Projektion Γ_m gehört —; denn es sind (nach der Bestimmungsweise von l) die m ersten Koordinaten $x_1, \cdots, x_m$ eines x-Punktes eindeutig bestimmt, wenn man die l ersten Koordinaten $y_1, \cdots, y_l$ des entsprechenden y-Punktes kennt, und wir wissen ja (nach der Bestimmung von $Y_1, \cdots, Y_l$) dass es einen Punkt des x-Raumes mit den m ersten Koordinaten $x_1^{(\nu)}, \cdots, x_m^{(\nu)}$ gibt (nämlich den Punkt $(x_1^{(\nu)}, \cdots, x_m^{(\nu)}, 0, 0, \cdots)$), für welchen der entsprechende y-Punkt gerade mit den l Koordinaten $Y_1, \cdots, Y_l$ anfängt.

2. Wir zeigen danach, dass, falls bei jedem m die Menge Γ_m ein echtes Gitter bildet, das System (1) ganzartig ist. Hierzu bestimmen wir das aus rationalen Zahlen bestehende Zahlenschema

$$\begin{array}{llllllll}
\beta_{1,1}, & 0, & 0, & 0, & \cdots 0, & 0, & 0, \cdots & \\
\beta_{2,1}, & \beta_{2,2}, & 0, & 0, & \cdots 0, & 0, & 0, \cdots & \\
\beta_{3,1}, & \beta_{3,2}, & \beta_{3,3}, & 0, & \cdots 0, & 0, & 0, \cdots & (\beta_{n,n} \neq 0 \text{ für alle } n) \\
\vdots & & & & & & & \\
\beta_{n,1}, & \beta_{n,2}, & \beta_{n,3}, & \beta_{n,4} & \cdots \beta_{n,n}, & 0, & 0, \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

durch das folgende Verfahren: Die Zahl $\beta_{1,1}$ ist ein (beliebig gewählter) Punkt $\neq 0$ in dem echten Gitter Γ_1. Da Γ_1 die Projektion von Γ_2 ist und sowohl $x_1 = \beta_{1,1}$ wie $x_1 = 0$ Punkte in Γ_1 sind, können wir $\beta_{2,1}$ und $\beta_{2,2}$ so wählen, dass $(\beta_{1,1}, \beta_{2,1})$ und $(0, \beta_{2,2})$ Punkte in Γ_2 darstellen, und da Γ_2 ein echtes Gitter ist, können wir hierbei $\beta_{2,2} \neq 0$ wählen. Danach bestimmen wir die drei Zahlen $\beta_{3,1}, \beta_{3,2}, \beta_{3,3}$ folgendermassen: da

$$(\beta_{1,1}, \beta_{2,1}), \quad (0, \beta_{2,2}), \quad (0, 0)$$

Punkte in Γ_2 sind und Γ_2 die Projektion von Γ_3 ist, können wir sie durch Hinzufügung passend gewählter Zahlen $\beta_{3,1}, \beta_{3,2}, \beta_{3,3}$ zu drei Punkten

$$(\beta_{1,1}, \beta_{2,1}, \beta_{3,1}), \quad (0, \beta_{2,2}, \beta_{3,2}), \quad (0, 0, \beta_{3,3})$$

ergänzen, welche zu Γ_3 gehören, und hierbei können wir $\beta_{3,3} \neq 0$ wählen, da Γ_3 ein echtes Gitter bildet (und also Punkte mit $x_3 \neq 0$ auf der x_3-Achse enthält). In dieser Weise setzen wir fort, bis das ganze Zahlenschema nach unendlich vielen Schritten bestimmt ist. Es ist hierbei klar, dass jeder Punkt des unendlich-dimensionalen Raumes, dessen Koordinaten durch die in einer senkrechten Spalte des gewonnenen Schemas stehenden Zahlen bestimmt sind, zur Menge Γ gehört; denn nach der Bestimmungsweise des Schemas, gehört ja, für jedes m, der bei der m^{ten} Koordinate »abgeschnittene« Punkt zur Menge Γ_m, und nach dem Satze 4 genügt dies um schliessen zu können, dass der Punkt selbst zu Γ gehört.

Wir bilden nun, mit Hülfe des obigen Schemas, die lineare Substitution

$$(16)\left\{\begin{array}{l} x_1 = \beta_{1,1} y_1 \\ x_2 = \beta_{2,1} y_1 + \beta_{2,2} y_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \beta_{n,1} y_1 + \beta_{n,2} y_2 + \cdots + \beta_{n,n} y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right. \qquad (\beta_{n,n} \neq 0 \text{ für alle } n)$$

und bezeichnen mit Γ^* die Punktmenge des unendlich-dimensionalen y-Raumes, welche die Bildmenge von Γ bei dieser Substitution bildet. Zu dieser Menge Γ^* gehören gewiss die sämtlichen Punkte der Form $(0, \cdots, 0, 1, 0, 0, \cdots)$ (d. h. sämtliche Punkte deren Koordinaten alle 0 sind, abgesehen von einer Koordinate, die gleich 1 ist); denn diese

Punkte entsprechen, nach (16), gerade den Punkten des x-Raumes, deren Koordinaten durch die Spalten des obigen Zahlenschemas gegeben sind. Wir werden zeigen, dass unser System (1) durch diese Substitution (16) in ein neues System

$$g_{n,1}y_1 + g_{n,2}y_2 + \cdots + g_{n,p_n}y_{p_n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

mit lauter ganzen Koeffizienten übergeht. Hierzu haben wir nur zu benutzen, dass Γ^* (als Bildmenge von Γ) die Menge der simultanen Lösungen der neuen Nullkongruenzen

$$g_{n,1}y_1 + g_{n,2}y_2 + \cdots + g_{n,p_n}y_{p_n} \equiv 0 \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

darstellt, so dass diese letzten Kongruenzen gewiss die obigen Punkte $(0, 0, \cdots, 1, 0, 0, \cdots)$ als Lösungen besitzen. In der Tat folgt hieraus sofort, dass alle g ganze Zahlen sein müssen; denn daraus, dass $y_m = 1$, $y_n = 0$ (für $n \neq m$) ein Lösung der Kongruenzen ist, folgt ja, dass die sämtlichen Koeffizienten der Variablen y_m ganze Zahlen sein müssen.

In dem vorhergehenden Satze war nur von den simultanen Lösungen der unendlich vielen Nullkongruenzen (13) die Rede. Für den Beweis des Hauptsatzes in § 5 wird es aber nötig sein, das in diesem Satze 6 gefundene Kriterium der »Ganzartigkeit« eines Systems (1) etwas umzuformen, und zwar so, dass die Lösungen einer beliebig grossen endlichen Anzahl dieser Nullkongruenzen in den Mittelpunkt der Betrachtungen hineingezogen werden. Wir bezeichnen hierzu mit $\Lambda^{(N)}$ die Menge sämtlicher Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ der N ersten der Nullkongruenzen[1], und mit $\Lambda_m^{(N)}$ die Projektion dieser Menge auf den m-dimensionalen Unter-

[1] Obwohl in diesen N Kongruenzen nur endlich viele x vorkommen, werden wir jedoch (vgl. Note 1, S. 4) unter einer Lösung der N Kongruenzen einen Punkt des unendlich-dimensionalen Raumes verstehen, so dass $\Lambda^{(N)}$ also eine Punktmenge dieses letzten Raumes bedeutet.

raum $x_1, \cdots, x_m$. Hierbei ist klar, dass bei jedem N die Relation $\varLambda^{(N)} > \varLambda^{(N+1)} > \varGamma$, und also auch die Relation $\varLambda_m^{(N)} > \varLambda_m^{(N+1)} > \varGamma_m$ besteht, und ferner, dass $\varLambda_m^{(N)}$ die Projektion von $\varLambda_{m+1}^{(N)}$ ist. Nach Voraussetzung kann jede der Variablen x aus den Linearformen des Systems (1) isoliert werden; wir bezeichnen mit $m^* = m^*(m)$ die kleinste Zahl, für welche jede der m ersten Variablen $x_1, \cdots, x_m$ aus den m^* ersten Linearformen isoliert werden kann.

Man sieht sofort, *dass bei jedem festen $m = 1, 2, \cdots$ und $N > m^*$ die Punktmenge $\varLambda_m^{(N)}$ ein echtes Gitter des m-dimensionalen Raumes bildet.* In der Tat:

1. Falls $(x'_1, \cdots, x'_m)$ und $(x''_1, \cdots, x''_m)$ zwei beliebige Punkte der Menge $\varLambda_m^{(N)}$ sind, wird auch der Differenzpunkt $(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m)$ zu $\varLambda_m^{(N)}$ gehören. Denn es können ja die beiden Punkte durch Hinzufügung weiterer Koordinaten zu zwei Punkten $(x'_1, \cdots, x'_m, x'_{m+1}, \cdots)$ und $(x''_1, \cdots, x''_m, x''_{m+1}, \cdots)$ der Menge $\varLambda^{(N)}$ ergänzt werden, und aus der Definition von $\varLambda^{(N)}$ folgt sofort, dass der Differenzpunkt $(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m, x'_{m+1} - x''_{m+1}, \cdots)$ ebenfalls zu $\varLambda^{(N)}$, also der »abgeschnittene« Punkt $(x'_1 - x''_1, \cdots, x'_m - x''_m)$ zu $\varLambda_m^{(N)}$ gehören wird.

2. Ferner ist klar, dass der Anfangspunkt $(0, 0, \cdots, 0)$ des m-dimensionalen Raumes kein Häufungspunkt der Menge $\varLambda_m^{(N)}$ sein kann, weil ja N so gross gewählt ist, dass jede der m Variablen $x_1, \cdots, x_m$ aus den N ersten Linearformen isoliert werden kann.

3. Und schliesslich ist klar, dass $\varLambda_m^{(N)}$ ein echtes Gitter bildet. In der Tat, falls H den Hauptnenner der (endlich vielen) rationalen Koeffizienten r der N ersten Kongruenzen bezeichnet, wird offenbar jeder Punkt $(x_1, x_2, \cdots)$ mit einer Koordinate gleich H und allen übrigen Koordinaten gleich 0 zur Menge $\varLambda^{(N)}$ gehören, so dass die Projektionsmenge $\varLambda_m^{(N)}$

gewiss auf jeder der m Koordinatenachsen einen vom Anfangspunkte verschiedenen Punkt enthalten wird (nämlich einen Punkt im Abstande H vom Anfangspunkte).

Es sei nunmehr m eine beliebig gewählte feste positive ganze Zahl; wir werden untersuchen, wie das Gitter $\Lambda_m^{(N)}$ $(N > m^*)$ sich ändert, wenn N ins Unendliche wächst. Aus der Relation $\Lambda_m^{(N)} > \Lambda_m^{(N+1)}$ ersieht man sofort, dass nur die beiden folgenden Möglichkeiten bestehen:

I. Entweder ändert sich das Gitter $\Lambda_m^{(N)}$ von einer gewissen Stelle an überhaupt nicht, d. h. es bleibt $\Lambda_m^{(N)}$ konstant für alle $N > N_0 = N_0(m)$. Wir bezeichnen in diesem Falle das konstante Endgitter $\Lambda_m^{(N)}$ $(N > N_0)$ mit Λ_m und nennen Λ_m *das* m^{te} *»Grenzgitter«*[1].

II. Oder es wächst das Volumen eines Grundparallelopipeds des Gitters $\Lambda_m^{(N)}$ mit $N \to \infty$ über alle Grenzen. Wir sagen in diesem Falle, dass (für das betrachtete m) *kein Grenzgitter* Λ_m *existiert.*

Satz 7. *Für die Ganzartigkeit des (reduzierten) Systems (1) ist notwendig und hinreichend, dass bei jedem festen* $m = 1, 2, \cdots$ *das Grenzgitter* Λ_m *existiert.*

Beweis. Nach dem Satze 6 handelt es sich darum zu zeigen, dass die beiden Bedingungen »es soll bei jedem m die Menge Γ_m ein echtes m-dimensionales Gitter sein« und »es soll bei jedem m ein Grenzgitter Λ_m existieren« inhaltlich gleichbedeutend sind.

1. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass, falls die Mengen Γ_m alle echte Gitter sind, alle Grenzgitter Λ_m existieren müssen. In der Tat ist ja bei festem m und jedem N das

[1] Wir bemerken, dass falls die Grenzgitter Λ_m und Λ_{m+1} beide existieren, Λ_m die Projektion von Λ_{m+1} sein wird. In der Tat kann ein N so gross gewählt werden, dass $\Lambda_m = \Lambda_m^{(N)}$ und $\Lambda_{m+1} = \Lambda_{m+1}^{(N)}$ sind, und bei einem festen N wissen wir ja schon, dass $\Lambda_m^{(N)}$ die Projektion von $\Lambda_{m+1}^{(N)}$ ist.

Gitter Γ_m in dem Gitter $\Delta_m^{(N)}$ enthalten, und es kann somit für $N \rightarrow \infty$ das Volumen des Grundparallelopipeds von $\Delta_m^{(N)}$ nicht über alle Grenzen wachsen.

2. Etwas tiefer liegt der Nachweis, dass umgekehrt aus der Existenz sämtlicher Grenzgitter Δ_m geschlossen werden kann, dass jedes Γ_m ein echtes Gitter ist. Wir führen diesen Nachweis dadurch, dass wir zeigen, dass Δ_m in Γ_m enthalten ist. Es sei also $(x_1, \cdots, x_m)$ ein beliebiger Punkt von Δ_m; wir haben zu beweisen, dass dieser Punkt ebenfalls zu Γ_m gehört, also dass er zu einem Punkte $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots)$ ergänzt werden kann, welcher zu Γ gehört, d. h. welcher eine simultane Lösung der sämtlichen Nullkongruenzen (13) darstellt. Hierzu müssen wir benutzen, dass nicht nur das Grenzgitter Δ_m, sondern auch die »höheren« Grenzgitter $\Delta_{m+1}, \Delta_{m+2}, \cdots$ alle existieren. Wir bilden (durch successive Wahl) die Folge der neuen Koordinaten $x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots$ so, dass jeder »Abschnitt« $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots, x_{m+p})$ zur Menge Δ_{m+p} gehört (was möglich ist, weil, nach Note S. 35, Δ_n die Projektion von Δ_{n+1} ist), und behaupten, dass der durch diese Koordinaten ergänzte Punkt $(x_1, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots)$ von der gewünschten Art ist, also eine simultane Lösung sämtlicher Nullkongruenzen darstellt, d. h. bei jedem festen N die N ersten der Kongruenzen befriedigt. In der Tat, es sei L der grösste Index eines x, welches in diesen N ersten Kongruenzen vorkommt; es genügt dann offenbar zu zeigen, dass der Punkt, welcher durch Projektion des Punktes $(x_1, x_2, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots)$ auf den L-dimensionalen Unterraum entsteht, also der Punkt $(x_1, \cdots, x_L)$, in $\Delta_L^{(N)}$ liegt; und dies ist gewiss der Fall, weil ja nach unserem Ergänzungsverfahren der Punkt $(x_1, \cdots, x_L)$ zu Δ_L gehört, und Δ_L in $\Delta_L^{(N)}$ enthalten ist.

§ 5.

Beweis des Hauptsatzes.

Hauptsatz. *Für das Zusammenfallen der beiden zu einem System (1) gehörigen Punktmengen Π_1 und Π_2 ist notwendig und hinreichend, dass das System ganzartig ist* (also durch eine lineare Substitution in ein neues System mit lauter ganzen Koeffizienten übergeführt werden kann).

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist, liegt auf der Hand. In der Tat wissen wir ja einerseits, dass der Übergang von einem System zu einem anderen mit Hilfe einer linearen Substitution sowohl die Menge Π_1 wie auch die Menge Π_2 ungeändert lässt, und andererseits (nach Satz 1), dass für ein System mit lauter ganzen Koeffizienten die Gleichung $\Pi_1 = \Pi_2$ besteht.

Die ganze Schwierigkeit liegt darin zu beweisen, dass die Bedingung der Ganzartigkeit für das Zusammenfallen der Mengen Π_1 und Π_2 auch notwendig ist. Hierbei können wir uns (nach § 3) ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Betrachtung eines reduzierten Systems (1) beschränken.

Wir nehmen an, dass das System nicht ganzartig ist, und haben zu beweisen, dass Π_1 eine echte Teilmenge von Π_2 ist, also dass ein Punkt $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ derart existiert, dass bei jedem festen N die N ersten der Kongruenzen

$$(2) \quad r_{n,1}x_1 + r_{n,2}x_2 + \cdots + r_{n,q_n}x_{q_n} \equiv \theta_n \pmod{1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

eine Lösung haben, aber keine simultane Lösung der sämtlichen Kongruenzen vorhanden ist. Das wesentlichste Hilfsmittel bei diesem Beweise ist der Satz 7, welcher ein Kriterium für die Ganzartigkeit (und also auch ein Kriterium für die Nicht-Ganzartigkeit) eines reduzierten Systems (1) gibt. Nach diesem Hilfsatz gibt es zu unserem (nicht ganzartigen) System (1) eine feste positive ganze Zahl m_0, so dass kein Grenzgitter Λ_{m_0} existiert, d. h. *so dass das Volumen V_N eines Grundparallelopipeds des Gitters $\Lambda_{m_0}^{(N)}$ $(N \geqq m_0^*)$ für $N \rightarrow \infty$ ins Unendliche wächst.*

Wir bestimmen zunächst eine unendliche Folge von wachsenden positiven ganzen Zahlen $N_1, N_2, \cdots, N_\nu, \cdots$ und zugehörigen positiven Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_\nu, \cdots$ durch das folgende Verfahren[1].

1°. Es sei $N_1 > m_0^*$ so gewählt, dass das Grundvolumen V_{N_1} des Gitters $\Lambda_{m_0}^{(N_1)}$ grösser als das Kugelvolumen $K(1)$ ist, und somit in der Anfangskugel $\mathbf{K}(1)$ gewiss kein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N_1)}$ enthalten ist. Zu diesem N_1 bestimmen wir die positive Zahl ϱ_1 so gross, dass jede Kugel mit dem Radius ϱ_1 (wo auch ihr Zentrum liegt) ein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N_1)}$ enthält.

2°. Danach bestimmen wir $N_2 > N_1$ derart, dass das Grundvolumen V_{N_2} grösser als das Kugelvolumen $K(\varrho_1 + 2)$ ist, und daher die Anfangskugel $\mathbf{K}(\varrho_1 + 2)$ kein vollständiges Repräsentantensystem in bezug af $\Lambda_{m_0}^{(N_2)}$ enthält. Und zu diesem N_2 bestimmen wir die positive Zahl ϱ_2 derart,

[1] Hierbei werden wir, um uns bei den folgenden Überlegungen über die Verhältnisse im m_0-dimensionalen Raume $x_1, \cdots x_{m_0}$ übersichtlich ausdrücken zu können, für einige immer wieder vorkommenden Begriffe abgekürzte Bezeichnungen einführen: Statt »Volumen eines Grundparallelopipeds des Gitters $\Lambda_{m_0}^{(N)}$« wollen wir »Grundvolumen des Gitters $\Lambda_{m_0}^{(N)}$« sagen, statt »m_0-dimensionale Kugel« einfach »Kugel«, statt »Volumen einer Kugel mit dem Radius ϱ« einfach »Kugelvolumen $K(\varrho)$« und statt »Kugel mit dem Anfangspunkt als Zentrum und dem Radius ϱ« einfach »Anfangskugel $\mathbf{K}(\varrho)$« oder nur »$\mathbf{K}(\varrho)$«. Ferner werden wir mit »einem vollständigen Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N)}$« eine solche Punktmenge bezeichnen, welche aus jedem System von Punkten $(x_1, \cdots, x_{m_0})$, welche in bezug auf das Gitter $\Lambda_{m_0}^{(N)}$ äquivalent liegen, genau einen Repräsentanten enthält.

dass jede Kugel mit dem Radius ϱ_2 ein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N_2)}$ enthält.

— — —

ν^0. Nachdem $N_{\nu-1}$ und $\varrho_{\nu-1}$ bestimmt sind, wählen wir $N_\nu > N_{\nu-1}$ derart, dass das Grundvolumen V_{N_ν} grösser als das Kugelvolumen $K(\varrho_{\nu-1}+\nu)$ ist, also die Anfangskugel $\mathsf{K}(\varrho_{\nu-1}+\nu)$ kein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N_\nu)}$ enthält, und danach wählen wir die positive Zahl ϱ_ν so, dass jede Kugel mit dem Radius ϱ_ν ein vollständiges Repräsentantensystem in bezug auf $\Lambda_{m_0}^{(N_\nu)}$ enthält.

— — —

Nach dieser Bestimmung von N_ν und ϱ_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ schreiten wir nunmehr zu direktem Aufsuchen eines Punktes $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$, welcher der Menge Π_2 aber nicht der Menge Π_1 angehört. Die Idee der (successiven) Bestimmung von $\theta_1, \theta_2, \cdots$ ist die, dass wir versuchen dafür zu sorgen, dass im m_0-dimensionalen Raume der Abstand des Anfangspunktes von der Projektion $(x_1, \cdots, x_{m_0})$ derjenigen Lösung $(x_1, x_2, \cdots)$ der N ersten Kongruenzen (2), für welche dieser Abstand am k l e i n s t e n ist, mit N über alle Grenzen wächst.

1^{ter} S c h r i t t. Wir wählen zunächst einen beliebigen Punkt $P' : (x'_1, x'_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen Raumes, welcher nur der Bedingung unterworfen sein soll, dass sein $m_0{}^{\text{ter}}$ »Abschnitt« $P'_{m_0} : (x'_1, \cdots, x'_{m_0})$ ein derartiger Punkt des m_0-dimensionalen Raumes ist, dass kein mit ihm in bezug auf das Gitter $\Lambda_{m_0}^{(N_1)}$ äquivalenter Punkt in der Anfangskugel $\mathsf{K}(1)$ gelegen ist. (Ein solcher Punkt existiert nach 1^0). Wir setzen $(x_1, x_2, \cdots) = (x'_1, x'_2, \cdots)$ in die N_1 ersten Linearformen von (1) ein. Die dadurch entstehenden Zahlen sollen unsere Zahlen $\theta_1, \cdots, \theta_{N_1}$ sein. Wir bemerken, dass die sämtlichen Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ der N_1 ersten (mit den eben gewählten θ gebildeten) Kongruenzen (2) durch die Menge $P' + A^{(N_1)}$ gegeben sind[1], weil $A^{(N_1)}$ ja die Gesamtmenge der Lösungen der N_1 ersten Nullkongruenzen angibt. Aus der Bestimmung von P' folgt, dass in der Projektion dieser Menge $P' + A^{(N_1)}$ auf den m_0-dimensionalen Unterraum — d. h. in der Menge $P'_{m_0} + A^{(N_1)}_{m_0}$, welche aus allen mit P'_{m_0} in bezug auf $A^{(N_1)}_{m_0}$ äquivalenten Punkten besteht — kein Punkt enthalten ist, welcher in der Anfangskugel $\mathbf{K}(1)$ liegt.

2ter Schritt. Wir wählen danach einen Punkt $P'' : (x''_1, x''_2, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen x-Raumes, welcher der obigen Menge $P' + A^{(N_1)}$ angehört, und ausserdem der Bedingung genügt, dass seine Projektion $P''_{m_0} : (x''_1, \cdots, x''_{m_0})$ auf den m_0-dimensionalen Unterraum in einer Kugel mit dem Radius ϱ_1 gelegen ist, deren Zentrum $C'' : (c''_1, \cdots, c''_{m_0})$ so gewählt ist, dass es keinen mit C'' in bezug auf $A^{(N_2)}_{m_0}$ äquivalenten Punkt in der Anfangskugel $\mathbf{K}(\varrho_1 + 2)$ gibt (was alles nach der Bestimmung von ϱ_1 und N_2 möglich ist). Wir setzen nun $(x_1, x_2, \cdots) = (x''_1, x''_2, \cdots)$ in die N_2 ersten Linearformen von (1) ein, und bezeichnen die herauskommenden Werte mit $\theta_1, \cdots, \theta_{N_2}$, wobei die N_1 ersten Zahlen $\theta_1, \cdots, \theta_{N_1}$ mit den obigen Zahlen $\theta_1, \cdots, \theta_{N_1}$ übereinstimmen, weil P'' zur Menge $P' + A^{(N_1)}$ gehört. Wir betrachten die Menge sämtlicher Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ der N_2 ersten (mit den gewählten θ gebildeten) Kongruenzen (2), d. h. die Menge $P'' + A^{(N_2)}$, und behaupten,

[1] Unter $P + A$, wo P einen Punkt und A eine Punktmenge desselben Raumes bedeuten, verstehen wir die (mit A kongruente) Punktmenge, welche aus der Menge A entsteht, wenn zu jedem ihrer Punkte der Punkt P' »addiert« wird; hierbei bedeutet »Addition« zweier Punkte $(x_1, x_2, \cdots)$ und $(y_1, y_2, \cdots)$ einfach die Bildung des Punktes $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots)$.

dass in der Projektion dieser Menge auf den m_0^{ten} Unterraum, d. h. in der Menge $P''_{m_0} + \varDelta_{m_0}^{(N_2)}$ aller mit P''_{m_0} in bezug auf $\varDelta_{m_0}^{(N_2)}$ aquivalenten Punkte, kein Punkt gelegen ist, welcher der Anfangskugel $\mathbf{K}(2)$ angehört. In der Tat gibt es in dieser Menge $P''_{m_0} + \varDelta_{m_0}^{(N_2)}$ einen Punkt, nämlich P''_{m_0} selbst, welcher von dem obigen Zentrum C'' um weniger als ϱ_1 abweicht, und weil $\mathbf{K}(\varrho_1 + 2)$ keinen mit C'' in bezug auf $\varDelta_{m_0}^{(N_2)}$ äquivalenten Punkt enthält, kann daher in $\mathbf{K}(2)$ kein mit P''_{m_0} äquivalenter Punkt (d. h. kein zu $P''_{m_0} + \varDelta_{m_0}^{(N_2)}$ gehöriger Punkt) gelegen sein.

— — —

ν^{ter} Schritt. Wir wählen einen Punkt $P^{(\nu)}: (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots)$ des unendlich-dimensionalen x-Raumes, welcher der Menge $P^{(\nu-1)} + \varDelta^{(N_{\nu-1})}$ angehört, und ausserdem der Bedingung genügt, dass sein m_0^{ter} Abschnitt $P_{m_0}^{(\nu)}: (x_1^{(\nu)}, \cdots, x_{m_0}^{(\nu)})$ in einer Kugel mit dem Radius $\varrho_{\nu-1}$ liegt, deren Zentrum $C^{(\nu)}: (c_1^{(\nu)}, \cdots, c_{m_0}^{(\nu)})$ so gewählt ist, dass kein mit $C^{(\nu)}$ in bezug auf $\varDelta_{m_0}^{(N_\nu)}$ äquivalenter Punkt der Anfangskugel $\mathbf{K}(\varrho_{\nu-1} + \nu)$ angehört. Dies ist alles möglich; denn nach der Bestimmung von N_ν gibt es gewiss einen Punkt $C^{(\nu)}$ der verlangten Art, und in die Kugel um $C^{(\nu)}$ mit dem Radius $\varrho_{\nu-1}$ fällt gewiss (nach der Bestimmung von $\varrho_{\nu-1}$) die Projektion eines Punktes der Menge $P^{(\nu-1)} + \varDelta^{(N_{\nu-1})}$, weil ja die Projektion $P_{m_0}^{(\nu-1)} + \varDelta_{m_0}^{(N_{\nu-1})}$ dieser letzten Menge ein ganzes System von untereinander äquivalenten Punkten in bezug auf $\varDelta_{m_0}^{(N_{\nu-1})}$ ausmacht. Wir setzen nun $(x_1, x_2, \cdots) = (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots)$ in die N_ν ersten Linearformen von (1) ein, und bezeichnen die herauskommenden Zahlen mit $\theta_1, \cdots, \theta_{N_\nu}$, wobei die $N_{\nu-1}$ ersten dieser Zahlen mit den bei dem $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Schritte bestimmten Zahlen $\theta_1, \cdots, \theta_{N_{\nu-1}}$ übereinstimmen (weil $P^{(\nu)}$ der Menge $P^{(\nu-1)} + \varDelta^{(N_{\nu-1})}$ angehört). Die sämtlichen Lösungen $(x_1, x_2, \cdots)$ der N_ν ersten (mit diesen θ gebildeten) Kongruenzen sind dann durch $P^{(\nu)} + \Lambda^{(N_\nu)}$ gegeben, also ihre Projektionen auf den m_0^{ten} Unterraum durch $P^{(\nu)}_{m_0} + \Lambda^{(N_\nu)}_{m_0}$. In dieser letzten Menge gibt es keinen Punkt, welcher der Anfangskugel $\mathsf{K}(\nu)$ angehört, weil $P^{(\nu)}_{m_0}$ in einem Abstand $< \varrho_{\nu-1}$ vom $C^{(\nu)}$ gelegen ist, und in $\mathsf{K}(\varrho_{\nu-1} + \nu)$ kein Punkt liegt, welcher mit $C^{(\nu)}$ in bezug auf $\Lambda^{(N_\nu)}_{m_0}$ äquivalent ist.

— — —

Hiermit sind wir am Ende. In der Tat erfüllt der somit bestimmte Punkt $(\theta_1, \theta_2, \cdots)$ die angegebenen Bedingungen. Denn einerseits haben bei jedem N die N ersten der Kongruenzen (2) eine Lösung — weil bei jedem ν die N_ν ersten Kongruenzen eine Lösung, nämlich $P^{(\nu)}: (x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}, \cdots)$ besitzen, und N_ν mit ν über alle Grenzen wächst — und andererseits gibt es gewiss keine simultane Lösung der sämtlichen Kongruenzen (2), weil jede Lösung der N_ν ersten Kongruenzen eine Projektion auf den m_0-dimensionalen Unterraum besitzt, deren Abstand vom Anfangspunkte $\geqq \nu$ ist, also für $\nu \to \infty$ beliebig gross wird.

Forelagt paa Mødet den 21. Februar 1925.
Færdig fra Trykkeriet den 4. Maj 1925.

MATHEMATISK-FYSISKE MEDDELELSER

UDGIVNE AF

DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKAB

4. BIND (Kr. 13,20):

5. BIND (Kr. 13,10):

6. BIND: